一般化最小 2 乗推定法の理論－展望

倉田博史(東京大学)

要旨

本報告では、一般線形回帰モデル

$$y = X\beta + \varepsilon \quad \text{with} \quad E(\varepsilon) = 0 \quad \text{and} \quad Cov(\varepsilon) = \Omega$$

における一般化最小2乗推定量((Feasible) Generalized Least Squares Estimator,以下単にGLSE)の小標本効率性について概説する。ここに一般線形回帰モデルとは、誤差項の分散行列Ωが未知パラメータの関数$\Omega = \Omega(\theta)$であるような線形回帰モデルを指す。このモデルは、系列相関モデル、不均一分散モデルなどの 1 変量回帰モデル、見かけ上無関係な回帰(Seemingly Unrelated Regression, SUR)モデル、成長曲線モデルなどの多変量回帰モデルを特殊な場合として含む。周知の通り、これらのモデルにおいてθが既知の場合、Gauss-Markov 推定量

$$\hat{\beta}(\Omega) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$

が係数ベクトルβの最良線形不偏推定量である(Gauss-Markov 定理)。しかし、多くの実際的問題ではθは未知であり、この場合、未知パラメータθを最小 2 乗残差eに基づく推定値$\hat{\theta} = \hat{\theta}(e)$で置き換えて得られる GLSE $\hat{\beta}(\hat{\Omega}) = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y$ (ここに$\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\theta})$)が広く用いられている。GLSE は一般に観測値ベクトルの非線形関数であるため、その分散行列を陽的に評価することは困難であり、従ってその小標本効率性は必ずしも明らかではない。この問題に対して、Kariya,T., Toyooka,Y., Eaton,M.L., Bilodeau,M., Usami,Y.,倉田(報告者)らは

(1) GLSE の不偏性と 2 次モーメントの存在のための十分条件

(2) GLSE の分散行列の下界の導出(非線形推定量に対する Gauss-Markov 定理)、下界の達成に関連する問題

(3) GLSE の分散行列の上界の導出

(4) GLSE の密度(分布)関数を正規分布で近似したときの近似誤差の一様限界

などの視点から研究を行っており、本報告ではこれらについて((4)は時間的制約により割愛)概説したい。