

数值解析

目次

1	補間法	2
1.1	線形補間	2
1.2	ラグランジェ補間	2
1.3	面要素補間	4
1.4	立体要素補間	5
2	連立一次方程式の解法	8
2.1	逆マトリックス法	8
2.2	ガウスの消去法	9
3	最小二乗法	10
4	代数方程式の解法	12
4.1	ニュートン法	12
4.2	ニュートン・ラブソン法	12
4.3	公式による解法	13
4.3.1	2次方程式	13
4.3.2	3次方程式：カルダノの公式	14
5	数値積分	16
5.1	シンプソンの積分公式	16
5.2	ガウスの積分公式	17
6	主応力	19
6.1	2次元主応力	19
6.2	3次元主応力	19
7	平面応力・平面ひずみ	21
7.1	一般化フックの法則	21
7.2	平面応力	21
7.3	平面ひずみ	22
7.4	一般化平面ひずみ状態	22
8	補足事項	23
8.1	偏微分について	23
8.2	テーラー展開について	23
8.3	全微分について	24

1 補間法

実験データや推定値として、独立変数 x に対する従属変数 y が関数 (x, y) としていく組も与えられている場合に、「2組の関係 (x, y) の間にある任意の x に対する y の値を求める」というのが補間法であり、ときには内挿法とも呼ばれることがある。実験結果として多くのデータが得られた後に、その結果を等間隔のまとまった関係として整理して数値表としたり、望む x 値における y 値を求めたりする場合に特に有用な方法である。

1.1 線形補間

図1-1にみるように真の曲線に対し、 (x_i, x_{i+1}) の間でその曲線を直線と仮定すれば、 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ にある点 x に対する y の値は次のように計算できる。

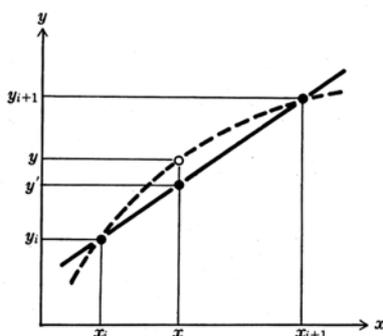


図1-1 線形補間

$$y' = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) \quad (1-1)$$

このような補間を線形補間と呼んでいるが、選ぶ区間 (x_i, x_{i+1}) を狭くするだけでその計算精度は向上するため、簡単で実用性の高い補間法といえる。

[演習問題]

(問題1) ある金属の棒における温度分布は、方端から 2, 3, 4, 5m の位置でそれぞれ 0, 4, 10, 16 であった。線形補間により方端から 3.5m, 4.2m の位置における温度を求めよ。

1.2 ラグランジェ補間

n 組のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとき、 n 個の点を通る $n-1$ 次多項式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} y &= a_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ &+ a_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ &+ a_3(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ &\dots\dots \\ &+ a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k P_k(x) \end{aligned} \quad (1-2)$$

ここで、 $P_k(x)$ は次式のような $n-1$ 次式である。

$$P_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \quad (1-3)$$

上式が (x_1, y_1) の点を通る条件としては,

$$y_1 = a_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \quad (1-4)$$

すなわち

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \\ &= \frac{y_1}{P_1(x_1)} \end{aligned} \quad (1-5)$$

これは, a_2, \dots, a_k についても同様であるから

$$a_k = \frac{y_k}{P_k(x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1-6)$$

式 (1-6) を式 (1-2) に代入して

$$y = \sum_{k=1}^n \frac{P_k(x)}{P_k(x_k)} \cdot y_k \quad (1-7)$$

式 (1-7) は, データ数 $n = 3$ では次のようになる.

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned} \quad (1-8)$$

となり, この式が $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ の 3 点を通ることがわかる.
また, データ数 $n = 4$ では次のようになる.

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \cdot y_2 \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \cdot y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \cdot y_4 \end{aligned} \quad (1-9)$$

このラグランジェの補間法の特徴は, それぞれのデータが等間隔に与えられている必要がないことである.

[演習問題]

(問題 1) 次の 4 組のデータから $x = 2.2$ の y の値をラグランジェの補間多項式で計算せよ. ここで, $y_i = \ln x_i$ である. つまり, ラグランジェの補間多項式によって求まる $x = 2.2$ の y は 0.78846 に近い値にならなければならない.

i	1	2	3	4
x_i	2.0	2.1	2.3	2.45
y_i	0.6931	0.7419	0.8329	0.8961

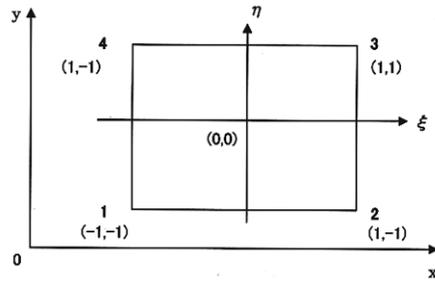


図 1 - 2 4 節点面要素

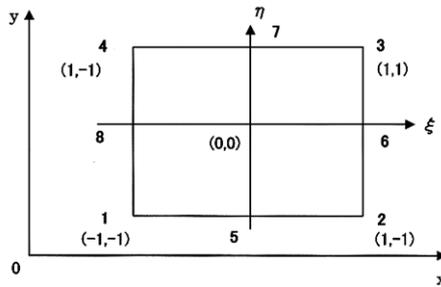


図 1 - 3 8 節点面要素

1.3 面要素補間

有限要素法に用いられるアイソパラメトリック要素の形状関数 (shape function) を用いて、面要素補間を行うことができる。

$$U = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \phi_i \quad (1-10)$$

U : 要素内の任意の点における特性値, N_i : 節点 i の形状関数, ϕ_i : 節点 i の特性値

アイソパラメトリック要素では、全体座標としての x 軸, y 軸の他に、要素の重心を原点として $-1 \sim 1$ で表される局所座標がある。局所座標は、全体座標の x 軸に対応するものとして ξ 軸, y 軸に対応するものとして η 軸で表される。

面要素は、隅の 4 節点で表される 4 節点面要素、隅とその中間の 8 節点で表される 8 節点面要素がある。図 1 - 2 に 4 節点面要素を図 1 - 3 に 8 節点面要素を示し、それぞれの要素における形状関数を以下に示す。

[4 節点面要素の形状関数]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned}$$

[8 節点面要素の形状関数]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (-1 - \xi - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (-1 + \xi - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (-1 + \xi + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (-1 - \xi + \eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta^2) \end{aligned}$$

[例題 1]

ある長方形断面の温度を計測したところ、次のような値が得られた。この長方形断面内に位置する P(8, 6) の温度を 4 節点要素の形状関数を用いて求めよ。

i	x 座標	y 座標	温度 ()
1	5	2	5
2	15	2	8
3	15	10	10
4	5	10	12

まず、全体座標と局所座標の関係を求める。今回の図形は長方形であることから、次のように求められる。

$$X = \frac{15-5}{1-(-1)} = 5, \quad Y = \frac{10-2}{1-(-1)} = 4$$

次に、局所座標の原点 (0x, 0y) を求める。局所座標の原点は全体座標において次のようになる。

$$0x = (15 - 5)/2 = 5, \quad 0y = (10 - 2)/2 = 4$$

したがって、温度を求める位置 P(8,6) は、局所座標において次のようになる。

$$Px = (8 - 10)/5 = -0.4, \quad Py = (6 - 6)/4 = 0$$

$Px = -0.4 = \xi, Py = 0 = \eta$ を形状関数に代入すると、P 点における温度が 8.65 と求められる。

i	形状関数 N_i	温度 ϕ_i	$N_i \cdot \phi_i$
1	0.350	5	1.75
2	0.150	8	1.20
3	0.150	10	1.50
4	0.350	12	4.20
計			8.65

[演習問題]

ある長方形断面の温度を計測したところ、次のような値が得られた。この長方形断面内に位置する P(8, 6) の温度を 8 節点要素の形状関数を用いて求めよ。

i	x 座標	y 座標	温度 ()
1	5	2	5
2	15	2	8
3	15	10	10
4	5	10	12
5	10	2	6.5
6	15	6	9
7	10	10	11
8	5	6	8.5

1.4 立体要素補間

立体要素の局所座標は、全体座標の x 軸に対応するものとして ξ 軸、y 軸に対応するものとして η 軸、z 軸に対応するものとして ζ 軸で表される。立体要素は、隅の 8 節点で表される 8 節点立体要素、隅とその中間の 20 節点で表される 20 節点立体要素がある。図 1 - 4 に 8 節点立体要素を図 1 - 5 に 20 節点立体要素を示し、それぞれの要素における形状関数を以下に示す。

[8 節点立体要素の形状関数]

$$N_1 = -\frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \zeta)$$

$$N_2 = -\frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 - \zeta)$$

$$N_3 = -\frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \zeta)$$

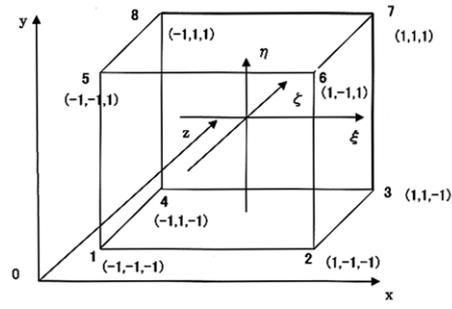


图 1 - 4 8 节点立体要素

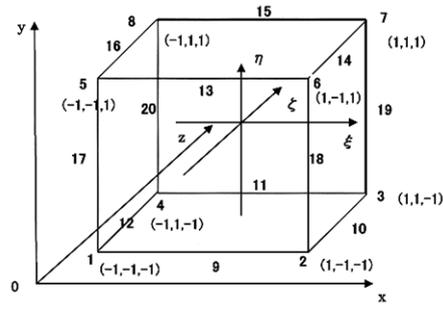


图 1 - 5 20 节点立体要素

$$\begin{aligned}
 N_4 &= -\frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \zeta) \\
 N_5 &= -\frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \zeta) \\
 N_6 &= -\frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \zeta) \\
 N_7 &= -\frac{1}{8} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta) \\
 N_8 &= -\frac{1}{8} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 + \zeta)
 \end{aligned}$$

[20 節点立体要素の形状関数]

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (2+\xi+\eta+\zeta) \\
 N_2 &= -\frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (2-\xi+\eta+\zeta) \\
 N_3 &= -\frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (2-\xi-\eta+\zeta) \\
 N_4 &= -\frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) \cdot (2+\xi-\eta+\zeta) \\
 N_5 &= -\frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (2+\xi+\eta-\zeta) \\
 N_6 &= -\frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (2-\xi+\eta-\zeta) \\
 N_7 &= -\frac{1}{8}(1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (2-\xi-\eta-\zeta) \\
 N_8 &= -\frac{1}{8}(1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \cdot (2+\xi-\eta-\zeta) \\
 N_9 &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1-\zeta) \\
 N_{11} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta) \\
 N_{12} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1-\zeta) \\
 N_{13} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\zeta) \\
 N_{14} &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1+\zeta) \\
 N_{15} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi^2) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\zeta) \\
 N_{16} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta^2) \cdot (1+\zeta) \\
 N_{17} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta^2) \\
 N_{18} &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\zeta^2) \\
 N_{19} &= \frac{1}{4} \cdot (1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta^2) \\
 N_{20} &= \frac{1}{4} \cdot (1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\zeta^2)
 \end{aligned}$$

2 連立一次方程式の解法

構造計算や有限要素解析では、連立一次方程式を解かなければならない。連立一次方程式は、行列（マトリックス）表示できることから、ここでは、マトリックスを解く方法である逆マトリックスを用いる方法とガウスの消去法について説明する。

2.1 逆マトリックス法

n 次の方角マトリックス A の逆行列 A^{-1} は、次式で求められる。

$$A^{-1} = \frac{(C_o.A)'}{|A|} \quad (2-1)$$

ここで、 A^{-1} : A の逆行列、 $(C_o.A)'$: A の随伴マトリックス、 $|A|$: A の行列式である。
 A の行列式 $|A|$ は、方角マトリックス A を、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

とすると、

$$\begin{aligned} |A| &= \{ (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) + (a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{12}) \} \\ &\quad - \{ (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}) + (a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}) \} \end{aligned} \quad (2-3)$$

である。

A の随伴マトリックス $(C_o.A)'$ は、 A の余因数マトリックス $(C_o.A)$ を転置したものである。ここで、転置とは、マトリックスの行と列を入れ替えたものである。

また、余因数マトリックスとは、 A の各成分 a_{ij} をその余因数で置き換えたものである。 a_{ij} の余因数とは、第 i 行第 j 列を消去した $(n-1)$ 次方角マトリックスの行列式の値である。そのとき、各余因数の負号は、 $(-1)^{i+j}$ で表され、余因数マトリックスおよび随伴マトリックスは以下ようになる。

$$(C_o.A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(C_o.A)' = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

2.2 ガウスの消去法

$$\begin{array}{rcccccc} 2w & + & x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ 6w & - & 6x & + & 6y & + & 12z & = & 36 \\ 4w & + & 3x & + & 3y & - & 3z & = & -1 \\ 2w & + & 2x & - & y & + & z & = & 10 \end{array}$$

前進消去

(1) w を消去するために, 第 1 行に適切な倍数を掛け各行から引く.

- 第 2 行 $-(6/2) \times$ 第 1 行, 第 3 行 $-(4/2) \times$ 第 1 行, 第 4 行 $-(2/2) \times$ 第 1 行

$$\begin{array}{rcccccc} - & 9x & & & + & 9z & = & 18 \\ & x & - & y & - & 5z & = & -13 \\ & x & - & 3y & & & = & 4 \end{array}$$

(2) x を消去するために, 第 1 行に適切な倍数を掛け各行から引く.

- 第 2 行 $-(1/-9) \times$ 第 1 行, 第 3 行 $-(1/-9) \times$ 第 1 行

$$\begin{array}{rcccccc} - & y & - & 4z & = & -11 \\ - & 3y & + & z & = & 6 \end{array}$$

(3) y を消去するために, 第 1 行に適切な倍数を掛け各行から引く.

- 第 2 行 $-(-3/-1) \times$ 第 1 行

$$13z = 39$$

後退代入

第 3 段階までで得られた方程式に順次それまでに得られた解を代入することで, 全ての解を求めることができる.

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & 13z & = & 39 & z & = & 3 \\ & & & -y & - & 4 \cdot 3 & = & -11 & y & = & -1 \\ -9x & & & & + & 9 \cdot 3 & = & 18 & x & = & 1 \\ 2w & +1 & + & 2 \cdot (-1) & + & 3 & = & 6 & w & = & 2 \end{array}$$

[演習問題]

(問題 1) 次の連立一次方程式を逆マトリックス法とガウスの消去法の両方で求めよ.

$$\begin{array}{rcc} 3x & + & y = 7 \\ x & - & 4y = -2 \end{array}$$

(問題 2) 次の連立一次方程式を逆マトリックス法とガウスの消去法の両方で求めよ.

$$\begin{array}{rcc} 4x & - & y & + & 2z = 15 \\ -x & + & 2y & + & 3z = 5 \\ 5x & - & 7y & + & 9z = 8 \end{array}$$

3 最小二乗法

$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとき, 直線

$$y = a + bx \quad (3-1)$$

をこれらの点と直線との距離の 2 乗和が最小となるように決める. ただし, 距離は垂直方向 (y 方向) で測る. x 座標の値が x_j となる直線上の点の y 座標は $a + bx_j$ である. したがって, (x_j, y_j) からの距離は $|y_j - a - bx_j|$ で与えられる. 2 乗和は,

$$q = \sum_{j=1}^n (y_j - a - bx_j)^2 \quad (3-2)$$

となる. q は a と b に依存するので, q が最小となるための必要条件は,

$$\frac{\partial q}{\partial a} = -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0 \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial b} = -2 \sum x_j (y_j - a - bx_j) = 0 \quad (3-4)$$

ただし, 和は j について 1 から n までとる. これより,

$$an + b \sum x_j = \sum y_j \quad (3-5)$$

$$a \sum x_j + b \sum x_j^2 = \sum x_j y_j \quad (3-6)$$

が成り立つ. これらの方程式は正規方程式と呼ばれる. この最小二乗法は一般の m 次の多項式にも拡張できる.

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \quad (3-7)$$

$$q = \sum_{j=1}^n [y_j - p(x_j)]^2 \quad (3-8)$$

q は $m + 1$ 個の b_0, \dots, b_m に依存するので, q が最小となるための必要条件は,

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \dots, \frac{\partial q}{\partial b_m} = 0$$

であり, $m + 1$ 個の正規方程式が得られる.

2 次方程式 $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ の場合, 正規方程式は以下ようになる.

$$b_0 n + b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 = \sum y_j \quad (3-9)$$

$$b_0 \sum x_j + b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 = \sum x_j y_j \quad (3-10)$$

$$b_0 \sum x_j^2 + b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 = \sum x_j^2 y_j \quad (3-11)$$

これをマトリックス表示すると, 以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_j & \sum x_j^2 \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_j \\ \sum x_j y_j \\ \sum x_j^2 y_j \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

この式における解 b_0, b_1, b_2 を求める方法としては, 逆行列を求めて解く方法と数値計算する方法 (ガウス法, ガウス・ジョルダン法, ヤコビ法, ガウス・ザイデル法) 等がある.

逆行列を求めて解く方法

$$\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_j & \sum x_j^2 \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sum y_j \\ \sum x_j y_j \\ \sum x_j^2 y_j \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

〔演習問題〕

(問題1) ある金属の棒における温度分布は、方端から 2, 3, 4, 5m の位置でそれぞれ 0, 4, 10, 16 であった。このときの長さ方向における温度分布を一次方程式で表現せよ。

(問題2) あるコンクリートの各材齢における圧縮強度が下の表のように得られている。このとき、材齢と圧縮強度の関係式における定数 a と b を求めよ。ここで、コンクリートの設計基準強度 f'_{ck} は 21N/mm^2 、コンクリートに使用されているセメントの種類は高炉セメント B 種であり、設計基準強度の基準材齢 i は 91 とする。

材齢 (日)	3	7	28	91
圧縮強度 (N/mm^2)	4.2	8.5	18.2	28.5

$$f'_c(t) = \frac{t}{a + bt} \cdot d(i) \cdot f'_{ck}$$

$f'_c(t)$: 材齢 t 日におけるコンクリートの圧縮強度 (N/mm^2)

t : 材齢 (日)

i : 設計基準強度の基準材齢 (日), $i = 28$ または 91

a, b : コンクリートによって異なる定数

d : 材齢 28 日に対する材齢 91 日の強度の増加率であり、 $d(28)$ は下表を標準とする。高炉セメント B 種の場合は、中庸熱ポルトランドセメントと同じ値を用いる。また、 $i = 91$ の場合は、セメント種類によらず、 $d(91) = 1$ とする。

f'_{ck} : コンクリートの設計基準強度 (N/mm^2)

セメントの種類	$d(28)$
普通ポルトランドセメント	1.11
中庸熱ポルトランドセメント	1.15
早強ポルトランドセメント	1.07

4 代数方程式の解法

4.1 ニュートン法

ニュートン法は、 f が連続な導関数 f' をもつときに $f(x) = 0$ を解くための一種の反復法であり、簡単で収束が速いことから広く用いられている。この方法は、 f の曲線を接線で近似することによって導かれる。適当に求めた近似値を x_0 とするとき、次の点 x_1 を x_0 における f の接線と x 軸との交点とする。このとき、

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{となり、第 2 段階では、} \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4-1)$$

となる。一般化すると次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4-2)$$

以下、 $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ の収束条件を満たすまで反復を繰り返す。

f が複数の解を有する方程式の場合は、まず一つ目の解を求めた後に、 $f(x) = (x - x_n)g(x)$ となる関数 $g(x)$ を求め、 $g(x)$ に対してニュートン法を適用し、次の解を求める。ここで、 x_n は $f(x)$ で求められる解である。

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (4-3)$$

$$g(x) = x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-1} \quad (4-4)$$

$f(x)$ と $g(x)$ が上式の場合における $g(x)$ の係数 b_1, b_2, \dots, b_{n-1} は、次の式で求めることができる。

$$b_1 = a_1 + x_n, \quad b_2 = a_2 + b_1 \cdot x_n, \quad b_3 = a_3 + b_2 \cdot x_n, \quad \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2} \cdot x_n \quad (4-5)$$

アルゴリズムは次のとおりである。(1) 出発値 x_0 を決める。(2) $f'(x_n)$ を計算する。(3) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ を計算する。ただし、 $f'(x_n) = 0$ ならば停止する。(4) 収束条件を検討する。ここで、収束条件を満たすならば終了する。満たさない場合は、(3) から再度計算を行う。

[演習問題]

(問題 1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ の解をニュートン法で求めよ。ただし、収束条件は、 $\varepsilon = 10^{-6}$ とする。

4.2 ニュートン・ラプソン法

1 変数方程式の解法の 1 つであるニュートン法を式 (4-6) のような非線形連立方程式の解法として拡張したものがニュートン・ラプソン法である。

$$f_1(x, y) = 0 \quad f_2(x, y) = 0 \quad (4-6)$$

いま、 x と y に関し、第 $i+1$ 近似値と第 i 近似値をとって、

$$x_{i+1} - x_i = h \quad y_{i+1} - y_i = k \quad (4-7)$$

と置き、式 (4-6) を第 i 近似値 (x_i, y_i) のまわりでテーラー展開し、1 次微分項で打ち切ると、

$$\begin{aligned} f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) &= f_1(x_i + h, y_i + k) \\ &= f_1(x_i, y_i) + h \frac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial x} + k \frac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) &= f_2(x_i + h, y_i + k) \\ &= f_2(x_i, y_i) + h \frac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial x} + k \frac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4-9)$$

ここで,

$$f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0 \quad f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0 \quad (4-10)$$

と置くと式(4-8)と式(4-9)は,

$$h \frac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial x} + k \frac{\partial f_1(x_i, y_i)}{\partial y} = -f_1(x_i, y_i) \quad (4-11)$$

$$h \frac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial x} + k \frac{\partial f_2(x_i, y_i)}{\partial y} = -f_2(x_i, y_i) \quad (4-12)$$

この式(4-11)と式(4-12)は, h, k のみが未知数であり, 他の各項は (x_i, y_i) に関する既知の値である. したがって, 式(4-11)と式(4-12)から点 (x_i, y_i) における h, k を2元の連立一次方程式として解いた後, 式(4-7)によって (x_{i+1}, y_{i+1}) を算出し, 新しく得られた値を再び (x_i, y_i) とみなして同様の計算を繰り返せば, 真の解の近似解が求められることになる.

ここで, 繰り返し計算用の収束条件としてはニュートン法と同じく, $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon_1, |y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon_2$ とすればよい. なお, 式(4-11)と式(4-12)の係数行列は偏微分項となるが, このような行列のことをヤコビ行列と呼んでいる.

[例題]

下記の連立方程式をニュートン・ラプソン法によって解いた場合, 以下のようになる. ここで, $x_0 = 0.10, y_0 = 0.10$ とし, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ とする.

$$f_1(x, y) = \ln x + y + 0.7506 = 0$$

$$f_2(x, y) = x + \ln y + 0.9727 = 0$$

まず, 式(4-11)と式(4-12)における各係数を求める.

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

ここで, $x_0 = 0.1, y_0 = 0.1$ であり, $\partial f_1(x_0, y_0)/\partial x = 10.0, \partial f_2(x_0, y_0)/\partial y = 10.0, f_1(x_0, y_0) = -1.4520, f_2(x_0, y_0) = -1.2299$ と求まることから, 式(4-11)と式(4-12)を h と k について解くことで, $h = 0.1342, k = 0.1096$ が求まる.

次の計算は, 式(4-7)の $x_1 = x_0 + h, y_1 = y_0 + k$ より, $x_1 = 0.2342, y_1 = 0.2096$ となり, 以下は上の計算例と同じことを収束条件を満足するまで繰り返してゆけばよい. 最終的には, $x = 0.3629, y = 0.2630$ となる.

[演習問題]

(問題1) 次式の解をニュートン・ラプソン法で求めよ. ただし, 収束条件は, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-10}$ とする.

$$f_1(x, y) = \log x + y^2 + 0.8912 = 0$$

$$f_2(x, y) = \log y + x + 1.0011 = 0$$

4.3 公式による解法

4.3.1 2次方程式

2次方程式の根は, 次のように求められることがよく知られている.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (4-13)$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4-14)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4-15)$$

この場合 $b^2 - 4ac > 0$ とすると, $4ac$ の値が b^2 に比較して極めて小さく, しかも $b > 0$ である場合, 式 (4-14) における 1 つの根は分子の値が絶対値のほぼ等しい異符号の値をとるため 0 に近づいてしまい, いわゆる桁落ちが生じてしまうことがある. したがって, この公式で根を求める場合, $b > 0$ のときは式 (4-15) によって 1 つの根を求めた後, 次のような根と係数の関係によって他の根を求める方がよい.

$$x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1} \quad (4-16)$$

また, この逆に $b < 0$ の場合には, 式 (4-14) から x_1 を求めた後, 式 (4-16) より x_2 を求めるとよい.

4.3.2 3 次方程式: カルダノの公式

次のような 3 次方程式の解法としては, カルダノの公式がある.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (4-17)$$

式 (4-17) において,

$$x = z - \frac{a}{3} \quad (4-18)$$

と置き換えて, 次のような標準形にする.

$$z^3 + mz + n = 0 \quad (4-19)$$

ここで,

$$m = \frac{3b - a^2}{3} \quad (4-20)$$

$$n = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} \quad (4-21)$$

式 (4-19) の判別式は,

$$D = \frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27} \quad (4-22)$$

であり, $D > 0$, $D < 0$, $D = 0$ に分けて根を求める.

(1) $D > 0$ の場合: 式 (4-19) はただ 1 つの実根を有する.

$$z = \left(-\frac{n}{2} + \sqrt{D}\right)^{1/3} + \left(-\frac{n}{2} - \sqrt{D}\right)^{1/3} \quad (4-23)$$

(2) $D < 0$ の場合: 相異なる 3 つの実根を有する.

$$z_i = 2\sqrt{-\frac{m}{3}} \cos\left(\frac{\deg}{3} + 120i\right) \quad (4-24)$$

ここで, i は $i = 1, 2, 3$ であり, 3 つの実根に対応する.

$$\deg = \cos^{-1} \left\{ \pm \sqrt{\frac{n^2/4}{-m^3/27}} \right\} \quad (4-25)$$

ただし, $n > 0$ で負 (-), $n < 0$ で正 (+) を用い, \deg は度 (degree) である.

(3) $D = 0$ の場合：3つの実根をもつが少なくともそのうち2つは同一の値となる．重根と1つの実根の値は， $z_1 = s\sqrt{-m/3}$ ， $z_2 = -2s\sqrt{-m/3}$ である．ただし， s は， $n > 0$ のとき 1， $n < 0$ のとき -1 とする．
以上の方法によって求まる z と式 (4-18) から x が求められる．

[例題 1] 次の 3 次方程式の解をカルダノの公式を用いて求めよ．

$$y = 0.5x^3 - 2.3x^2 + 0.7x + 1.2 = 0$$

まず，式 (4-17) のように置き換える．

$$y = x^3 - 4.6x^2 + 1.4x + 2.4 = 0$$

この式を式 (4-19) のように標準化するために式 (4-20)，(4-21) を用いて m, n を求めると， $m = -5.6533$ ， $n = -2.6634$ となる．また，判別式である式 (4-22) により， $D = -4.9185$ となり $D < 0$ であることから，この式は 3 つの実根をもつことがわかる．式 (4-24) と式 (4-25) より， $i = 1, 2, 3$ について計算を繰り返し，得られた $z_1 \sim z_3$ を式 (4-18) に代入することで， $x_1 = -0.55971$ ， $x_2 = 1.04112$ ， $x_3 = 4.11859$ が求まる．

5 数値積分

5.1 シンプソンの積分公式

シンプソンの公式は単純ながら多くの問題に対し、十分な精度を与える上で実用上きわめて重要な公式である。この公式を導くには、積分区分 $a \leq x \leq b$ を偶数個の等しい長さの小区間に細分する必要がある。各区分長さが等しくない場合は、補間により等しくすればよい。例えば、端点を $x_0 (= a), x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} (= b)$ とする長さ $h = (b - a)/2n$ の $2n$ 個の小区間に分割する（図 5 - 1 参照）

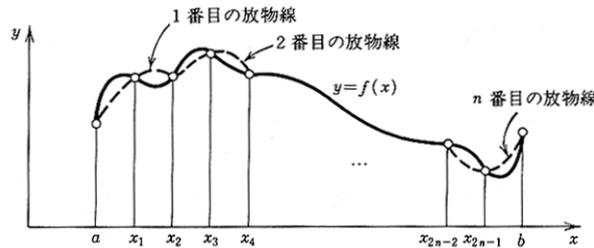


図 5 - 1 シンプソンの公式

次に、最初の 2 つの小区間を考え、区間 $x_0 \leq x \leq x_2 = x_0 + 2h$ 上で関数 $f(x)$ を $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ を通るラグランジェ多項式で近似する。ただし、 $f_j = f(x_j)$ である。

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot f_1 \\
 &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot f_2
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

ここで、分母はそれぞれ $2h^2, -h^2, 2h^2$ となる。 $s = (x - x_1)/h$ とすると、 $x - x_0 = (s + 1)h, x - x_1 = sh, x - x_2 = (s - 1)h$ が成り立ち、

$$p_2(x) = \frac{1}{2}s(s - 1)f_0 - (s + 1)(s - 1)f_1 + \frac{1}{2}s(s + 1)f_2 \tag{5-2}$$

となる。ここで、 x に関し x_0 から x_2 まで積分する。これは、 s に関し -1 から 1 まで積分することに相当する。 $dx = hds$ を用いると、次のような簡単な結果が得られる。

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = h \left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 \right) \tag{5-3}$$

同様な結果が x_2 から x_4 まの区間などについても成り立つ。これらの n 個の公式をまとめるとシンプソンの公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) \tag{5-4}$$

が得られる。ただし、 $h = (b - a)/2n, f_j = f(x_j)$ である。

[例題]

次の式の $x = 0$ から $x = 1$ で囲まれる部分の面積を計算せよ。ここで、 $n = 10$ とする。

$$y = f(x) = e^{-x} + 3 \sin \frac{\pi x}{3}$$

隣接する 2 つの区間に関して、3 つの点を用いて計算を進めると下の表のような結果が得られ、最終的に面積の総和は 2.06452 と求まる。

$$f_i(x) = \frac{h}{3} \times \{f(x_i) + 4 \cdot f(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}) + f(x_{i+1})\}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

$h = (b - a)/2n$ より , $h = (1 - 0)/(2 \cdot 10) = 0.05$

i	x_i	x_{i+1}	$\frac{x_{i+1} + x_i}{2}$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(\frac{x_{i+1} + x_i}{2})$	$f_i(x)$
1	0.00	0.10	0.05	1.00000	1.21842	1.10824	0.11086
2	0.10	0.20	0.15	1.21842	1.44246	1.33001	0.13302
3	0.20	0.30	0.25	1.44246	1.66786	1.55525	0.15552
4	0.30	0.40	0.35	1.66786	1.89052	1.77978	0.17796
5	0.40	0.50	0.45	1.89052	2.10652	1.99959	0.19992
6	0.50	0.60	0.55	2.10652	2.31215	2.21085	0.22103
7	0.60	0.70	0.65	2.31215	2.50396	2.40999	0.24093
8	0.70	0.80	0.75	2.50396	2.67875	2.59367	0.25929
9	0.80	0.90	0.85	2.67875	2.83360	2.75884	0.27579
10	0.90	1.00	0.95	2.83360	2.96594	2.90274	0.29017

解 (合計): 2.06450

5.2 ガウスの積分公式

シンプソンの積分公式は等間隔の x の値に対する関数値を用い, ある次数以下の多項式に対して厳密な値を与えるものであった. より一般に, 次式ができるだけ高い次数 m の多項式に対して厳密となるように $2n$ 個の定数 $A_1 \cdots, A_n, x_1 \cdots, x_n$ を定めることができる (積分区間は積分変数の 1 次変換により, $a = -1, b = 1$ とすることができる.)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f_j \quad [f_j = f(x_j)] \quad (5-5)$$

$2n$ は $2n - 1$ 次の多項式の係数の数であるから, $m = 2n - 1$ である. ガウスは, $x_1 \cdots, x_n$ をルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ の n 個の零点とし, 係数 A_j を適当に選ぶと ($n - 1$ や n でなく) $2n - 1$ 次以下の多項式に対して, 式 (5-5) が厳密に成立することを示した. ただし, $P_n(x)$ は,

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots \quad (5-6)$$

である. この式 (5-5) をガウスの積分公式と呼び, 各次数 n に対する零点と係数は, 表 5 - 1 のようになる.

表 5 - 1 ガウスの積分公式における零点と係数

n (積分点数)	零点		係数
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	$= \pm 0.5773502692$	1
3	0		8/9
	$\pm \sqrt{3/5}$	$= \pm 0.7745966692$	5/9
4	$\pm \sqrt{(15 - \sqrt{120})/35}$	$= \pm 0.3399810436$	0.6521451549
	$\pm \sqrt{(15 + \sqrt{120})/35}$	$= \pm 0.8611363116$	0.3478548451

[例題 1]

次の式の $x = 0 (= a)$ から $x = 1 (= b)$ で囲まれる部分の面積を計算せよ。ただし、 $n=3$ とする。

$$y = f(x) = e^{-x^2}$$

まず、 x が 0 から 1 までの積分を z が -1 から 1 までの積分に変換する必要がある。変数変換は $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{1-(-1)}z$ で行う。積分区間 0 から 1 の中心は $\frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ 、中心から z までの距離は $\frac{b-a}{1-(-1)}z = \frac{1-0}{1-(-1)}z = \frac{1}{2}z$ であることから、変数変換は $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$ 、 $dx = \frac{1}{2}dz$ となる。したがって、積分は $\int_0^1 y dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y dz$ となる。式 (5-5) で $n=3$ とし、表 5-1 の零点と係数の値を用いると次のようになる。

$$z_1 = -\sqrt{3/5} = -0.7746 \text{ のとき, } x_1 = 1/2 + (1/2) \times (-0.7746) = 0.1127, y_1 = 0.9874$$

$$z_2 = 0 \text{ のとき, } x_1 = 1/2 + (1/2) \times 0 = 0.5, y_1 = 0.7788$$

$$z_3 = \sqrt{3/5} = 0.7746 \text{ のとき, } x_1 = 1/2 + (1/2) \times 0.7746 = 0.8873, y_1 = 0.4551$$

$y_1 \sim y_3$ とこれらの値に対する係数を用いることで積分の値を求める。

$$\int_0^1 y dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y dz = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{9} \times 0.9874 + \frac{8}{9} \times 0.7788 + \frac{5}{9} \times 0.4551 \right) = \frac{1}{2} (0.5485 + 0.6923 + 0.2582) = 0.7468$$

[例題 2]

次の式の $x = 0.5 (= a)$ から $x = 2.5 (= b)$ で囲まれる部分の面積を計算せよ。ただし、 $n=3$ とする。

$$y = f(x) = 1.13x^5 - 0.852x^4 + 1.02x^3 - 0.985x^2 + 1.24x + 1.55$$

まず、 x が 0.5 から 2.5 までの積分を z が -1 から 1 までの積分に変換する必要がある。変数変換は $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{1-(-1)}z$ で行う。ここで、 $\frac{a+b}{2}$ は a, b 間の中心であり、 $\frac{b-a}{1-(-1)}z$ は中心から z までの距離であることから、変数変換は $x = \frac{3}{2} + z$ 、 $dx = dz$ となる。したがって、積分は $\int_{0.5}^{2.5} y dx = \int_{-1}^1 y dz$ となる。式 (5-5) で $n=3$ とし、表 5-1 の零点と係数の値を用いると次のようになる。

$$z_1 = -\sqrt{3/5} = -0.7746 \text{ のとき, } x_1 = 3/2 - 0.7746 = 0.7254, y_1 = 2.3116$$

$$z_2 = 0 \text{ のとき, } x_2 = 3/2 + 0 = 1.5, y_2 = 8.9039$$

$$z_3 = \sqrt{3/5} = 0.7746 \text{ のとき, } x_3 = 3/2 + 0.7746 = 2.2746, y_3 = 57.273$$

$y_1 \sim y_3$ とこれらの値に対する係数を用いることで積分の値を求める。

$$\int_{0.5}^{2.5} y dx = \int_{-1}^1 y dz = \frac{5}{9} \times 2.3116 + \frac{8}{9} \times 8.9039 + \frac{5}{9} \times 57.273 = 1.2842 + 7.9146 + 31.819 = 41.017$$

[演習問題]

(問題 1) 次式を区間 $x = 0 \sim 3$ において、シンプソンの公式とガウスの公式により積分せよ。ただし、シンプソンの公式においては $n=5$ とし、ガウスの公式においては $n=3$ とする。

$$y = f(x) = 0.258x^5 + 0.8235x^4 - 1.0012x^3 - 2.5232x^2 + 0.0112x + 0.253$$

6 主応力

6.1 2次元主応力

2次元空間における物体内には、2つの垂直応力 (σ_x, σ_y) と1つのせん断応力 ($\tau_{xy} : \tau_{xy} = \tau_{yx}$) が作用している。ここで、物体内には、せん断応力が0となるような面が互いに直交して2つ存在する。これらの面を主応力面、その面に作用する垂直応力を主応力 (principal stress) といい、主応力面の方向にとった軸を主応力軸 (axis of principal stress) と呼ぶ。

2次元空間においては、次式に示すように最大と最小の2つの主応力がある。

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad \text{最大主応力} \quad (6-1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad \text{最小主応力} \quad (6-2)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad \text{最大主応力が正の } x \text{ 軸となす角} \quad (6-3)$$

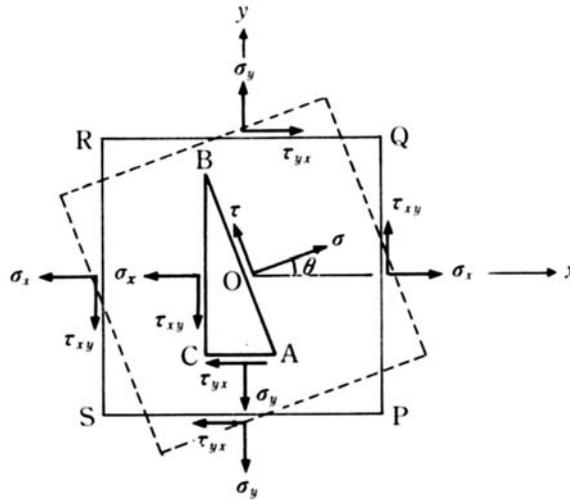


図6-1 2次元空間における応力成分

一方、最大せん断応力 (maximum shear stress) は、次の式で求める。

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (6-4)$$

6.2 3次元主応力

3次元空間における物体内には、3つの垂直応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) と3つのせん断応力 ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} : \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$) が作用している。3次元空間における主応力は、最大、中間、最小の3つの主応力があり、次の3次方程式から得ることができる。3次方程式の解法には、ニュートン法やカルダノの解が用いられる。

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ & - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (6-5)$$

このとき $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ において、 σ_1 : 最大主応力、 σ_2 : 中間主応力、 σ_3 : 最小主応力である。式(6-5)は、次のようにして示される場合もある。

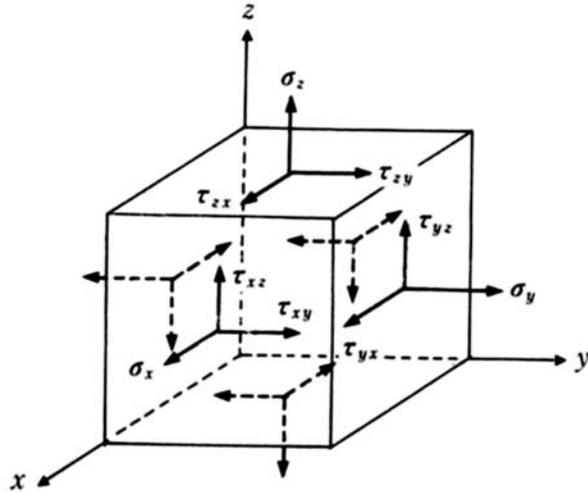


図 6 - 2 3次元空間における応力成分

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (6-6)$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (6-7)$$

$$J_2 = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6-8)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (6-9)$$

ここで, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ である.

各主応力の方向は, 式 (6-5) から求まる σ を代入して, $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ の方向余弦の比から求める.

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0 \quad (6-10)$$

$$\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma = 0 \quad (6-11)$$

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0 \quad (6-12)$$

$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ の比を求めた後, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ に代入して各方向余弦を求める. ここで, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ である.

[演習問題]

(問題 1) 次表に示す数字を用いて, 2次元主応力と3次元主応力をニュートン法とカルダノの公式でそれぞれ求めよ.

σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
15.7	14.5	0.10	-0.00003	0.00245	0.00178

7 平面応力・平面ひずみ

7.1 一般化フックの法則

ひずみ 応力曲線における降伏点以下では、応力 σ はひずみ ε に比例する。この関係がフックの法則 (Hook's law) である。

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7-1)$$

ここで、 E は縦弾性係数あるいはヤング係数 (Young's modulus) である。

式 (7-1) は単軸応力状態である。2 次元応力場や 3 次元応力場の場合、つまり単軸応力状態以外の応力状態においては、フックの法則を一般化する必要がある。ここでは、 $\varepsilon_z = 0$ とした平面ひずみ状態における一般化フックの法則について示す。

まず、 x 軸方向に垂直応力 σ_x だけが加わっている場合を考える。この状態では、単軸応力下のフックの法則から生じるひずみは、ヤング係数とポアソン比を用いて、次のように表される。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_x \quad (x \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-2)$$

$$\varepsilon'_{xy} = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \quad (y \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-3)$$

次に、 y 軸方向に垂直応力 σ_y だけが加わっている場合を考える。この状態での単軸応力下のフックの法則から生じるひずみは、 x 軸方向と同じように表される。

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_y \quad (y \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-4)$$

$$\varepsilon'_{yx} = -\nu\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_y \quad (x \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-5)$$

したがって、垂直応力 σ_x と σ_y が同時に加わった場合は、これらのひずみが足し合わされ、次のひずみ 応力関係が得られる。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon'_{yx} = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \quad (x \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-6)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_{xy} + \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y \quad (y \text{ 方向のひずみ}) \quad (7-7)$$

3 次元応力場では、次のようになる。

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \quad (7-8)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \quad (7-9)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z \quad (7-10)$$

7.2 平面応力

平面応力状態とは、図 7 - 1 のように、厚さが無視できる薄い平板において、斜線で示した面の近似的な応力状態のことである。このような薄い平板では、 z 方向に力が加わることはないことから、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となる。一般化フックの法則にこの条件を代入すれば、平面応力状態におけるひずみ 応力関係を得ることができる。ここで、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 ε は垂直ひずみ、 γ はせん断ひずみである。

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (7-11)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7-12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} \right) \quad (7-13)$$

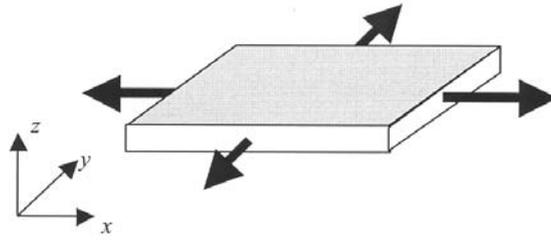


図 7 - 1 平面応力状態

式 (7-11) ~ (7-13) をマトリックス表示すると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7-14)$$

この式におけるひずみベクトルの係数行列を有限要素法を用いた弾性解析の分野では、D マトリックスと呼び、 $[D]$ で表す。応力ベクトルを $\{\sigma\}$ 、ひずみベクトルを $\{\varepsilon\}$ で表せば、式 (7-14) は、次のようになる。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (7-15)$$

7.3 平面ひずみ

平面ひずみ状態とは、図 7 - 2 のように、十分に厚さがある物体（部材）において、斜線で示した構造物内部の面の近似的な応力状態のことである。このような厚い物体（部材）では、 z 方向に変形することは困難なことから、 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ となる。一般化フックの法則にこの条件を代入すれば、平面ひずみ状態におけるひずみ 応力関係を得ることができる。

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_y \right\} \quad (7-16)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right\} \quad (7-17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (7-18)$$

式 (7-16) ~ (7-18) をマトリックス表示すると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7-19)$$

7.4 一般化平面ひずみ状態

平面ひずみ状態では、 $\nu_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ と、 z 方向のひずみを完全に 0 に拘束してしまう。実際の構造物では、いかに厚い部材でも十分に厚いというケースは少なく、 z 方向にも変形するケースがある。このような構造物の応力状態は、どの断面も変形するとは限らないため厳密には 3 次元応力場になる。しかしながら、近似的に 2 次元応力場として扱うことも可能であり、この場合は一般化平面ひずみ状態として考える。一般化平面ひずみ状態では、 $\sigma_z = 0$ とはせず、例えば、その平面の z 方向の合応力（応力の和）が 0 である、つまり、面の z 方向に働いている力の総和が 0 になるように z 方向にひずみをもたせる。

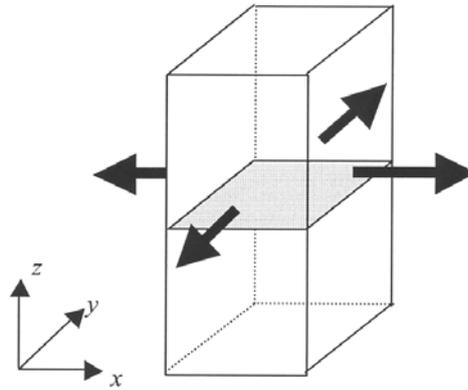


図 7 - 2 平面ひずみ状態

8 補足事項

8.1 偏微分について

2 つ以上の変数の関数では，ある 1 つの変数を変化させ，他の変数を定数と考え微分することができる。例えば， $z = f(x, y)$ とすれば，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (8-1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (8-2)$$

と定義される $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$ のことをそれぞれ z の x による偏微分， z の y による偏微分という。
2 階の偏微分は，

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

となる。3 階以上の偏微分についても 2 階と同様である。

8.2 テーラー展開について

$f(x, y)$ はある狭い範囲で微分可能とすると， $f(x, y)$ のテーラー展開式は，

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) &= f(x, y) + \frac{\Delta x^1}{1!} f'(x, y) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x, y) \\ &+ \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (8-3)$$

となる。ただし， Δx は x の微小な増分であることから，第 2 項までをとり，第 3 項以降を無視すると，

$$f(x + \Delta x, y) \approx f(x, y) + \Delta x f'(x, y) \quad (8-4)$$

$$f'(x, y) = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (8-5)$$

が得られる。これを微分の前進差分近似公式という。また、後退差分近似公式は以下の式で表される。

$$f'(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \quad (8-6)$$

8.3 全微分について

ある関数 $z = f(x, y)$ を例にして考えると、ある点 (x, y) の近くで x を $x + \Delta x$ 、 y を $y + \Delta y$ としたとき、 z の変化を $z + \Delta z$ であるとする、

$$\Delta z = \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (8-7)$$

となる。ここで、右辺は、

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (8-8)$$

であり、さらに

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \quad (8-9)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (8-10)$$

であるから、結局、

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (8-11)$$

が成立する。この dz のことを全微分と呼ぶ。